



回响环境下的最优波束形成器设计

李志保*, 戴或虹

中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100190

E-mail: zbli@lsec.cc.ac.cn, dyh@lsec.cc.ac.cn

收稿日期: 2015-04-14; 接受日期: 2015-08-14; 网络出版日期: 2016-02-25; * 通信作者
中国博士后科学基金 (批准号: 2014M561081) 资助项目

摘要 目前大多数波束形成器 (beamformer) 的设计方法在模型建立时都是为了得到期望的波束形成响应 (beamformer response), 如最小方差无失真响应 (minimum variance distortionless response, MVDR) 方法和线性约束最小方差 (linearly constrained minimum variance, LCMV) 方法. 为了构造人们期望的波束形成响应, 最简单的方法就是采用从目标声源点到波束形成器输出点的脉冲响应 (impulse response), 加上一个波束形成器群延迟 (group delay). 然而对于波束形成器群延迟的估计却是未知的, 经验地, 人们将其选择为波束形成器长度的一半. 可是在回响环境下, 这样的波束形成响应选择往往不是最优的. 为了设计最优波束形成器, 本文考虑波束形成响应与波束形成器的联合设计问题. 首先, 引入一个新的变量来表示波束形成响应, 并且将波束形成响应与波束形成器联合设计问题建模成一个结构型约束凸优化 (structured constrained convex optimization, SCCO) 问题. 其次, 利用 SCCO 问题的结构可分性, 引入交替方向法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) 来加以求解. 为了文章的完整性, 本文还给出 ADMM 算法收敛性结果的一个简单证明框架. 最后, 数值实验结果表明, 提出的波束形成器设计方法在回响环境下是有效的, 并且比 LCMV 方法效果更好.

关键词 波束形成器设计 回响 波束形成脉冲 结构型约束凸优化模型 交替方向乘法

MSC (2010) 主题分类 94A12, 90C30, 90C90

1 引言

在过去几十年里, 基于麦克风阵列 (microphone array) 的波束形成技术 (beamforming techniques) 在很多领域都被广泛地研究和应用, 如电话会议、免提通信系统、语音识别和助听设备等 (参见文献 [1–3]). 一般地, 波束形成器 (beamformer) 设计方法不仅适用于麦克风阵列语音增强, 还适用于无线通信信号处理, 如雷达和声呐等 (参见文献 [4–6]). 绝大多数波束形成技术的研究都是基于通道效应可以建模成时间延迟与能量衰减这样的假设条件. 一些有名的波束形成器设计方法有最小方差无失真响应 (minimum variance distortionless response, MVDR) 方法^[7,8]、线性约束最小方差 (linearly constrained minimum variance, LCMV) 方法^[9] 和广义旁瓣消除 (generalized sidelobe canceler, GSC) 技术等^[10,11]. MVDR 技术是最为广泛应用的自适应波束形成器设计方法之一, 其基本思想是在满足

英文引用格式: Li Z B, Dai Y H. Optimal beamformer design in the reverberant environment (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2016, 46: 877–892, doi: 10.1360/012016-17

一个指向期望信号的阵列响应的线性约束条件下, 极小化波束形成器功率来选择滤波器系数. 然而, MVDR 波束形成器设计方法可能会产生不可接受的低零水平集 (low nulling level), 这将导致在意外干扰信号情形下表现显著下降. 特别地, 在有快速移动的干扰环境下, MVDR 波束形成技术的表现会急剧下降, 因为干扰运动会将干扰源带离适应谱 (adapted pattern) 的尖锐凹口. 因此, Affes 和 Grenier^[12] 在 1997 年提出了 GSC 来设计波束形成器, 这其实是对 MVDR 技术的一种交替实现^[10], 即追踪信号子空间来联合降低噪声和回响. 另外, GSC 技术也即是 LCMV 技术的一种变形, 将约束优化问题转换为无约束优化模型. 因此, GSC 技术与 LCMV 技术本质上是相同的, 只不过 GSC 技术具有更好的实现优势^[13]. Bitzer 等^[14] 曾研究了在空间漫射噪声环境下 GSC 技术波束形成器的理论表现极限, 而 LCMV 技术和与其对应的 GSC 技术之间的理论等价性也已被证明 (参见文献 [15]).

一般情形下, 波束形成器的设计思想都是试图从某个具体方向得到感兴趣的信号 (signal of interest, SOI), 同时极小化干扰信号 (interference signal, INT) 与噪声信号 (noise, NOI) 在波束形成器输出中的功率^[16]. 这些目标或需求在波束形成器设计模型中通常被构造为目标函数或者线性约束. 然而, 在回响环境下, 约束条件的个数往往要多于滤波器系数变量的个数, 这使得构造得到的线性系统具有超定性. 并且, 在以上提及的这些波束形成器设计方法里, 期望的波束形成响应通常被假设为已知, 或者启发式地定义为一个包含波束形成器群延迟的脉冲响应, 而且数值上, 群延迟被人为地选择为滤波器长度的一半. 这样的模型构造有时候会严重地影响波束形成器的表现, 特别是在回响环境下.

本文为波束形成响应与波束形成器的设计问题构造一个联合优化模型. 在联合优化模型中, 一方面引入一个新的变量来替代波束形成响应. 由于实际期望的波束形成响应脉冲中非零元素个数非常少, 因此, 我们希望求解得到的新变量是稀疏的. 另一方面, 在回响环境下, 对应于波束形成需求的线性约束系统通常是超定的, 只能求得最小二乘解, 并且对于干扰信号源, 我们期望得到零脉冲的波束形成响应. 为了设计回响环境下的最优波束形成器, 我们提出一个结构型约束凸优化模型 (structured constrained convex optimization, SCCO), 这个模型同时考虑了对超定线性系统的拟合以及波束形成响应变量的稀疏性需求. 由于 SCCO 模型具有结构可分性, 我们采用交替方向乘子法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) 加以求解. 尽管关于 ADMM 方法的收敛性已经被证明, 但是大多数证明思路是从变分不等式角度出发的, 或者在某些特殊情形下得到, 如文献 [17–21]. 为了文章的完整性, 本文在文献 [17] 的基础上也给出了 ADMM 方法的一个简单证明框架. 最后, 本文给出一些数值实验结果, 来验证新提出的波束形成器设计方法的有效性.

2 时域信号模型与 LCMV 方法

假设感兴趣语音信号 (signal of interest, SOI) 产生于声源点 \mathbf{r}_0 , 其他干扰信号 (interference signals, INTs) 产生于声源点 \mathbf{r}_n , $n = 1, 2, \dots, N-1$, 不过背景噪声 (noise, NOI) 的位置信息未知. 如果系统内有一个含有 M 个麦克风的阵列放置于位置 \mathbf{p}_m , $m = 1, 2, \dots, M$, 见图 1, 那么这组麦克风接收到的信号在时域内可以表示成

$$x_m(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{h}_{nm} * \mathbf{s}_n)(k) + v_m(k), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.1)$$

这里符号 $*$ 表示线性卷积算子, \mathbf{h}_{nm} 是描述声波从声源点 \mathbf{r}_n 传播到第 m 个麦克风所在位置 \mathbf{p}_m 的脉冲响应 (传递函数), $v_m(k)$ 为第 m 个麦克风所接收到的噪声项.

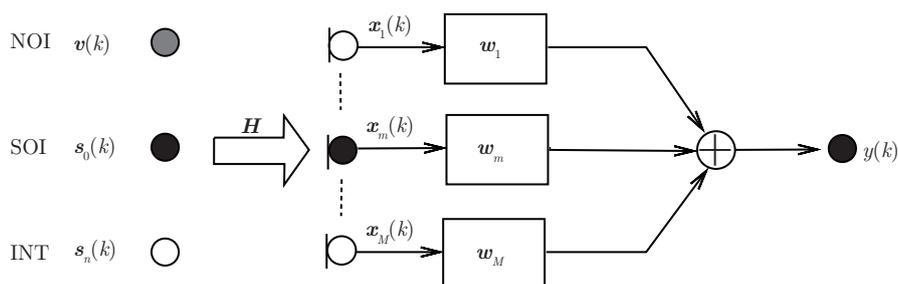


图 1 时域信号波束形成系统模型

假如每个麦克风后面都跟有一个长度为 L 的有限脉冲响应滤波器 (finite impulse response filter, FIR filter), 滤波器系数记作 $\mathbf{w}_m = (w_m(1), w_m(2), \dots, w_m(L))^T, m = 1, 2, \dots, M$, 则这一波束形成器的输出可以写成

$$y(k) = \sum_{m=1}^M (\mathbf{x}_m * \mathbf{w}_m)(k) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=0}^{L-1} w_m(l)x_m(k-l). \quad (2.2)$$

如果把输入信号 $x_m(k)$ 代入 (2.2), 我们可以将波束形成器的输出重写为

$$y(k) = \sum_{m=1}^M (\mathbf{w}_m * \mathbf{h}_{0m} * \mathbf{s}_0)(k) + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M (\mathbf{w}_m * \mathbf{h}_{nm} * \mathbf{s}_n)(k) + \sum_{m=1}^M (\mathbf{w}_m * \mathbf{v}_m)(k). \quad (2.3)$$

从而, 波束形成器设计的目标就是寻找一组滤波器 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \dots, \mathbf{w}_M^T)^T$ 使得 (2.3) 右边第一部分求和重构我们感兴趣的 SOI 信号 \mathbf{s}_0 , 并且消除余下的两部分.

在 LCMV 波束形成技术中, 人们通过极小化噪声功率来求解滤波器系数, 并且要求波束形成响应不仅形成 SOI 的脉冲响应, 还能消除 INT 的脉冲响应. 不失一般性, 我们可以假设所有语音信号都是零均值的, 从而, LCMV 波束形成器设计问题可以建模成

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{ML}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_v \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{H}_{\text{SOI}} \mathbf{w} = \mathbf{g}_0, \\ & \mathbf{H}_{\text{INT}} \mathbf{w} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

这里 \mathbf{R}_v 表示输入噪声信号 \mathbf{v}_m 的联合相关矩阵, \mathbf{H}_{SOI} 和 \mathbf{H}_{INT} 是由从 SOI 和 INT 声源点到麦克风阵列的脉冲响应所生成的卷积矩阵, \mathbf{g}_0 为关于 SOI 的期望波束形成响应. 具体地, 卷积矩阵 \mathbf{H}_{SOI} 构造形式如下:

$$\mathbf{H}_{\text{SOI}} = [\mathbf{H}_{\text{SOI},1} \quad \mathbf{H}_{\text{SOI},2} \quad \cdots \quad \mathbf{H}_{\text{SOI},M}], \quad (2.5)$$

这里

$$\mathbf{H}_{\text{SOI},i} = \begin{pmatrix} h_{0i}(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{0i}(1) & h_{0i}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{0i}(2) & h_{0i}(1) & h_{0i}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{0i}(L_i) \end{pmatrix},$$

L_i 为室内脉冲响应 (room impulse response, RIR) 的长度, 并且卷积矩阵 \mathbf{H}_{INT} 有着与 (2.5) 中 \mathbf{H}_{SOI} 类似的构造方式.

在以上波束形成器设计模型 (2.4) 中, 波束形成响应 $\mathbf{H}_{\text{SOI}}\mathbf{w}$ 通常被要求逼近一个期望的脉冲, 用来描述声波从 SOI 声源点 \mathbf{r}_0 到麦克风阵列输出点 \mathbf{p}_c (通常选取为麦克风阵列的中心位置) 的直接传播过程, 再加上波束形成器系统的群延迟 (group delay) τ . 由于声波的直接传播过程可以被传递函数刻画,

$$T(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_c, f) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_c\|} e^{-j2\pi f \frac{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_c\|}{c}}, \quad (2.6)$$

这里 f 为频率, c 为声波的传播速率, 因而时域脉冲响应 \mathbf{h}_D 即可由 $T(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_c, f)$ 的逆 Fourier 变换得到. 从传递函数 (2.6) 的定义可以看出, 声波的传播过程包含能量的衰减与时间的延迟. 所以语音信号在经过麦克风阵列系统处理时, 也将会产生能量衰减与时间延迟. 而语音信号在通过传感器阵列时的能量衰减微弱, 时间延迟将是主要影响因素. 因此, 一种选取期望波束形成响应的方法就是定义 $\mathbf{g}_0 = \mathbf{h}_D(k - \tau)$, 图 2(a) 给出了一个简单的直接脉冲响应 \mathbf{h}_D 与期望波束形成响应 \mathbf{g}_0 的图示.

一般地, 期望脉冲响应的群延迟 τ 都是经验地事先定义, 例如, 滤波器长度的一半 $\tau = L/2$. 因此, 在矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{R}_v)^{-1}\mathbf{H}^T$ ($\mathbf{H} = [\mathbf{H}_{\text{SOI}}^T \ \mathbf{H}_{\text{INT}}^T]^T$) 的逆存在的假设条件下, 问题 (2.4) 的解可以直接求得

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{R}_v^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}(\mathbf{R}_v)^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{g}, \quad (2.7)$$

这里 $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_0^T \ \mathbf{0}^T]^T$. 从而, 波束形成技术在无线通信与室外麦克风阵列等应用领域都能取得很好效果 (参见文献 [1, 11, 16]).

然而, 由于室内声场的影响, 室内脉冲响应 (room impulse response, RIR) \mathbf{h} 的特征非常复杂 (参见文献 [22, 23]), 见图 2(b). 另外, 随着回响时间 (reverberation time) 的增长, 室内脉冲响应的持续时间急剧增长. 如果在设计波束形成器时, 滤波器的长度 L 不变, 回响环境下的波束形成条件约束对应的线性系统 (2.4) 将会是超定的、不可解的. 因此, 在设计回响环境下的波束形成器时, 通常需要对 LCMV 模型进行松弛. 例如, 定义问题 (2.4) 的罚函数

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \alpha) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{R}_v\mathbf{w} + \frac{\alpha}{2}\|\mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{g}\|^2, \quad (2.8)$$

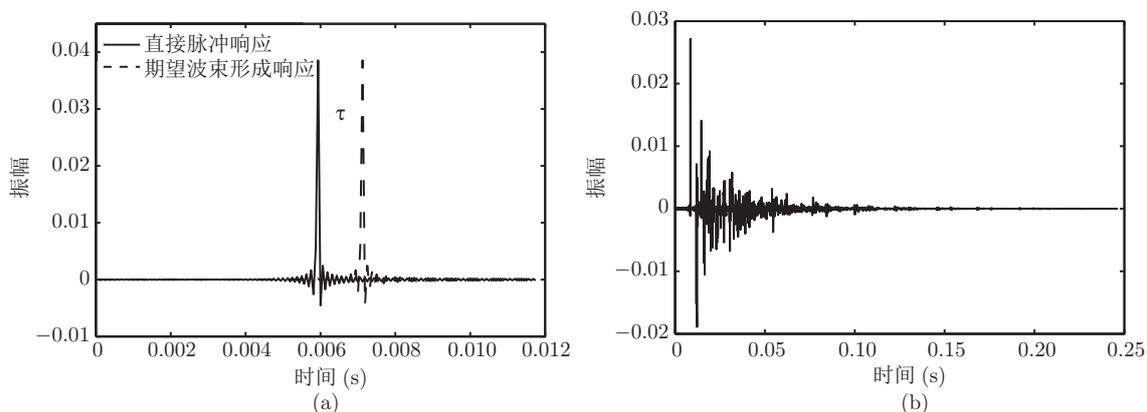


图 2 脉冲响应示例图. (a) 室外直接脉冲响应 (direct path impulse response) \mathbf{h}_D 和带有群延迟 τ 的期望波束形成响应 (desired response) \mathbf{g}_0 ; (b) 回响环境下室内脉冲响应 \mathbf{h}

这里 $\alpha > 0$ 为罚因子. 从而, LCMV 波束形成技术的一个松弛模型可以写成

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{ML}} \quad & \mathcal{P}(\mathbf{w}, \alpha) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w} \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里 \mathcal{D} 为一个辅助可行域.

松弛模型 (2.9) 通过惩罚关于 SOI 和 INT 的约束需求, 来避免 LCMV 模型 (2.4) 在某些回响环境下的不可行性, 得到了最小二乘意义下的一个逼近解. 然而, 当 SOI 和 INT 的约束需求不满足线性关系时, 逼近解往往会有较大偏差. 所以, 人们迫切需要构造一个更合理的波束形成器设计模型, 特别是在有回响环境下.

3 最优波束形成器设计

注意到关于 SOI 的期望波束形成响应 \mathbf{g}_0 实际上只是一个特殊的脉冲. 在理论上, 这只是一个在某位置 k_0 (用来刻画声波传播的时间延迟) 处含有一个非零元, 在其他所有位置都是零的简单的脉冲. 事实上, 这个非零元素的位置是由两个方面因素决定的: 声波传播从 SOI 声源点到波束形成器输出点之间的时间延迟与语音信号通过波束形成器系统的群延迟. 前一部分时间延迟取决于两个物理点的空间位置, 可以通过测量估计. 而群延迟与波束形成器系统有关, 如何定义群延迟对最优波束形成器的设计非常重要. 基于以上分析, 我们提出用一个新的变量来代替 \mathbf{g}_0 , 并且建立一个新的结构型优化模型来求解最优波束形成器设计.

若波束形成器的长度为 L , 则群延迟 τ 的取值范围就是 $[1, L]$. 首先定义一个变量 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^L$ 来表示期望波束形成响应 \mathbf{g}_0 中非零元素可能出现的位置, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

这里 \mathbf{A} 为矩阵 \mathbf{H}_{SOI} 的 L 行子矩阵, 对应于非零元素可能出现的位置. 我们把矩阵 \mathbf{H}_{SOI} 的剩余部分记作 \mathbf{B} (假设 $[\mathbf{H}_{\text{SOI}}^T \mathbf{H}_{\text{INT}}^T]^T = [\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T]^T$), 则有 $\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{0}$. 由于在有回响环境下这一线性系统是超定的, 只能求得最小二乘意义解, 因此, 我们将其违反度罚到目标函数项. 从而, 我们可以构造如下关于变量 \mathbf{w} 和 \mathbf{u} 的结构型优化模型来设计最优波束形成器, 即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{ML}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^L} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\mathbf{R}_v + \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ & \|\mathbf{u}\|_0 \leq r, \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里 $\|\mathbf{u}\|_0 = \sum_{i=1}^L \text{sign}(|u_i|)$, $r \geq 1$ 是一个整数函数. 在以上模型 (3.2) 中, 新添加的约束 $\|\mathbf{u}\|_0 \leq r$ 用来控制 \mathbf{u} 的解的稀疏性. 理论上, 期望波束形成响应是一个只有一个非零元素的脉冲, 即取 $r = 1$. 然而, 在有回响环境下的波束形成器设计过程中, 由于室内声场会产生多次反射, 故这一需求有可能无法满足. 因此, 在有回响情形下, 求解一个稀疏波束形成响应是有意义的.

一般情形下, 由于 $\|\cdot\|_0$ 是一个取整数值、不连续并且非凸的函数, 类似于最优化问题 (3.2) 的带 $\|\cdot\|_0$ 约束问题被证明是 NP- 难的, 很难求解. 一种常用的处理这类带 $\|\cdot\|_0$ 约束优化问题的方法是用 $\|\cdot\|_1$ 代替 $\|\cdot\|_0$ 约束, 来求解对应的松弛问题^[24, 25]. 在压缩传感等应用中, 这一方法能够很好地求解

满足一定假设条件的原问题^[26]. 因此, 若记 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_v + \mathbf{B}^T \mathbf{B}$, 用 $\|\cdot\|_1$ 代替 $\|\cdot\|_0$, 并将其罚到目标函数项, 我们可以为波束形成器设计构造如下结构型约束凸优化 (SCCO) 问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{ML}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^L} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{Q} \mathbf{w} + \beta_1 \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\beta_2}{2} \|\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - c\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里 $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ 和 $c = \max\{\|\mathbf{h}_D\|\}$ 是常数, $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ 是一个常数向量. 在以上 SCCO 模型 (3.3) 中, 目标函数的第一项用于降低噪声功率, 抑制反射与干扰; 第二项用来控制 \mathbf{u} 的稀疏性; 添加的第三项是确保波束形成响应与 \mathbf{h}_D 有着相同的能量衰减, 这一目标项同时也能避免期望波束形成响应 $\mathbf{A} \mathbf{w}$ (等于 \mathbf{u}) 收敛到零. 另外, 与 LCMV 模型 (2.4) 相比, 新提出的波束形成器设计模型 (3.3) 很好地避免了在有回响环境下模型的不可行性.

4 ADMM 方法求解 SCCO 问题

新提出的 SCCO 模型是一类典型的可分结构型带有线性约束的凸规划问题, 并且 SCCO 问题 (3.3) 是一个标准的两块凸极小化问题, 我们可以采用经典的交替方向乘子法 (ADMM) 加以求解.

4.1 ADMM 方法

ADMM 方法采用自适应的交替极小化可分离变量 \mathbf{w} 与 \mathbf{u} 的模式, 可以看作是增广 Lagrange 方法 (augmented Lagrange method, ALM) 用于求解类似于可分型问题 (3.3) 的一个实用型、结构型的变体 (可分形式或者松弛形式). 在给出 ADMM 算法求解 SCCO 问题的具体形式之前, 首先定义

$$\theta_1(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{Q} \mathbf{w} + \frac{\beta_2}{2} \|\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - c\|_2^2, \quad \theta_2(\mathbf{u}) = \beta_1 \|\mathbf{u}\|_1,$$

则 SCCO 问题 (3.3) 对应的增广 Lagrange 函数可以写成

$$\mathcal{L}_A(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \theta_1(\mathbf{w}) + \theta_2(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{u}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{u}\|_2^2, \quad (4.1)$$

这里 $\boldsymbol{\lambda}$ 为与等式约束 $\mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ 对应的 Lagrange 乘子, $\mu > 0$ 为正则化参数. 然后对于变量 \mathbf{w} 和 \mathbf{u} , 采用一种 Gauss-Seidel 型迭代模式极小化 $\mathcal{L}_A(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, 乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 的更新可以在一次交替更新 \mathbf{w} 和 \mathbf{u} 后得到. 更一般地, 给定任意初始点 $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, ADMM 迭代模式可以写成: 对任意 $i \geq 0$, 更新

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{i+1} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{ML}} \mathcal{L}_A(\mathbf{w}, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i), & (4.2a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{i+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^L} \mathcal{L}_A(\mathbf{w}^{i+1}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^i), & (4.2b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}^i - \mu (\mathbf{A} \mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}). & (4.2c) \end{cases}$$

注 4.1 在以上 ADMM 迭代框架中, 子问题 (4.2a) 和 (4.2b) 均可以有效地求得全局最优解. 特别地, 子问题 (4.2a) 是一个关于变量 \mathbf{w} 的凸二次规划问题, 可以通过一阶最优性条件求得其最优解, 即

$$\nabla \theta_1(\mathbf{w}) + \mu \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - \mu \mathbf{A}^T \mathbf{u}^i - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}^i = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

子问题 (4.2b) 同样存在闭式解

$$\mathbf{u}^{i+1} = \text{shrink}\left(\mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \frac{\boldsymbol{\lambda}^i}{\mu}, \frac{\beta_1}{\mu}\right), \quad (4.4)$$

这里 $\text{shrink}(\cdot, \cdot)$ 为收缩算子, 定义为

$$(\text{shrink}(\mathbf{u}, \delta))_j = \text{sign}(\mathbf{u}_j) \cdot \max(|\mathbf{u}_j| - \delta, 0), \quad j = 1, \dots, L-1, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{L-1}, \quad \delta > 0. \quad (4.5)$$

4.2 最优性条件与停机准则

由函数 θ_1 和 θ_2 的定义, 可以看出 θ_1 和 θ_2 均是闭的、恰当的与凸的. 假设 SCCO 问题 (3.3) 的 Lagrange 函数存在一个鞍点 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, 则

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \theta_1(\mathbf{w}) + \theta_2(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{u}), \quad (4.6)$$

从而,

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^*). \quad (4.7)$$

因此, SCCO 问题 (3.3) 解的充要条件是原始可行的, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{u}^* = 0, \quad (4.8)$$

并且也是对偶可行的,

$$0 = \nabla\theta_1(\mathbf{w}^*) - \mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda}^*, \quad (4.9)$$

$$0 \in \partial\theta_2(\mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\lambda}^*. \quad (4.10)$$

由 ADMM 算法可知, \mathbf{u}^{i+1} 极小化 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathbf{w}^{i+1}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^i)$, 因此,

$$0 \in \partial\theta_2(\mathbf{u}^{i+1}) + \boldsymbol{\lambda}^i - \mu(\mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}) = \partial\theta_2(\mathbf{u}^{i+1}) + \boldsymbol{\lambda}^{i+1}. \quad (4.11)$$

这意味着 \mathbf{w}^{i+1} 和 $\boldsymbol{\lambda}^{i+1}$ 总是满足 (4.10) 的. 因此, 最优性条件只需要满足 (4.8) 和 (4.9). 由于 \mathbf{w}^{i+1} 极小化 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$, 有

$$0 = \nabla\theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) - \mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda}^i + \mu\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^i) = \nabla\theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) - \mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \mu\mathbf{A}^\top(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}), \quad (4.12)$$

或者等价地,

$$\mu\mathbf{A}^\top(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}) = \nabla\theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) - \mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda}^{i+1},$$

即 $r_D^{i+1} = \mu\mathbf{A}^\top(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1})$ 可以看成是对偶可行性条件 (4.9) 的残余. 不失一般性, 我们可以定义 r_D^{i+1} 为第 $i+1$ 次迭代的对偶残余, $r_P^{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}$ 为与其对应的原始残余.

最优性条件的残余可以被看作当前点的目标次优性 (objective suboptimality) 的一个界. 由于 $r_P^i + \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^* = \mathbf{A}(\mathbf{w}^i - \mathbf{w}^*)$, 根据以下收敛性分析中不等式 (4.14), 有

$$\theta_1(\mathbf{w}^i) + \theta_2(\mathbf{u}^i) - \theta_1(\mathbf{w}^*) + \theta_2(\mathbf{u}^*) \leq (\boldsymbol{\lambda}^i)^\top r_P^i - (\mathbf{w}^i - \mathbf{w}^*)^\top r_D^i.$$

这表示目标次优性随着残余 \mathbf{r}_P^i 和 \mathbf{r}_D^i 递减而减小. 若对当前点离最优点的位置有一个估计 $\|\mathbf{w}^i - \mathbf{w}^*\|_2 \leq d$, 则

$$\theta_1(\mathbf{w}^i) + \theta_2(\mathbf{u}^i) - \theta_1(\mathbf{w}^*) + \theta_2(\mathbf{u}^*) \leq (\boldsymbol{\lambda}^i)^\top \mathbf{r}_P^i + d \|\mathbf{r}_D^i\|_2 \leq \|\boldsymbol{\lambda}^i\|_2 \|\mathbf{r}_P^i\|_2 + d \|\mathbf{r}_D^i\|_2.$$

因此, 当 $\boldsymbol{\lambda}^i$ 是有界的时, 一个合理的停机准则就是原始残余与对偶残余非常小. 例如,

$$\|\mathbf{r}_P^i\|_2 \leq \epsilon_P, \quad \|\mathbf{r}_D^i\|_2 \leq \epsilon_D,$$

这里 $\epsilon_P > 0, \epsilon_D > 0$ 为可接受误差范围.

4.3 收敛性分析

若把 SCCO 问题 (3.3) 的目标函数记作 $\theta = \theta_1(\mathbf{w}) + \theta_2(\mathbf{u})$, 其对应的最优目标函数值记作

$$\theta^* = \inf\{\theta_1(\mathbf{w}) + \theta_2(\mathbf{u}) \mid \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

接下来将证明, 如果 Lagrange 函数 $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 有一个鞍点 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, 则由 ADMM 方法产生的序列 $(\mathbf{w}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$ 分别收敛到 $\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^*$. 另外, 对应的原始残余、对偶残余和目标函数值也是收敛的, 即 $\mathbf{r}_P^i \rightarrow 0, \mathbf{r}_D^{i+1} \rightarrow 0, \theta^i \rightarrow \theta^*$.

引理 4.1 假设 Lagrange 函数 $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 有一个鞍点 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, 并且 SCCO 问题 (3.3) 的最优目标函数值是 θ^* . 假如序列 $(\mathbf{w}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$ 是由 ADMM 算法产生的, 并且与之对应的原始残余为 $\mathbf{r}_P^{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}$, 则有

$$\theta^* - \theta^{i+1} \leq -(\boldsymbol{\lambda}^*)^\top \mathbf{r}_P^{i+1}, \quad (4.13)$$

以及

$$\theta^{i+1} - \theta^* \leq (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^\top \mathbf{r}_P^{i+1} - \mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^\top (\mathbf{r}_P^{i+1} + \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^*), \quad (4.14)$$

这里 $\theta^{i+1} = \theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) + \theta_2(\mathbf{u}^{i+1})$.

证明 由于 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 是 $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 的一个鞍点, 则有

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}^{i+1}, \mathbf{u}^{i+1}, \boldsymbol{\lambda}^*). \quad (4.15)$$

利用 $\mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{u}^* = 0$, 可得

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \theta_1(\mathbf{w}^*) + \theta_2(\mathbf{u}^*) - \boldsymbol{\lambda}^{\top}(\mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{u}^*) = \theta_1(\mathbf{w}^*) + \theta_2(\mathbf{u}^*) = \theta^*. \quad (4.16)$$

因为 $\theta^{i+1} = \theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) + \theta_2(\mathbf{u}^{i+1})$, 所以, $\mathcal{L}(\mathbf{w}^{i+1}, \mathbf{u}^{i+1}, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 可以被写成

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}^{i+1}, \mathbf{u}^{i+1}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) + \theta_2(\mathbf{u}^{i+1}) - (\boldsymbol{\lambda}^*)^\top (\mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}) = \theta^{i+1} - (\boldsymbol{\lambda}^*)^\top \mathbf{r}_P^{i+1}. \quad (4.17)$$

联合以上不等式 (4.15) 以及等式 (4.16) 和 (4.17), 即可得到 (4.13).

另一方面, 由对偶最优性条件 (4.11) 和 (4.12), 我们可得 \mathbf{u}^{i+1} 极小化

$$\theta_2(\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^\top \mathbf{u},$$

并且 \mathbf{w}^{i+1} 极小化

$$\theta_1(\mathbf{w}) - (\boldsymbol{\lambda}^{i+1} + \mu(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}))^T \mathbf{A}\mathbf{w}.$$

从而,

$$\theta_2(\mathbf{u}^{i+1}) + (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^T \mathbf{u}^{i+1} \leq \theta_2(\mathbf{u}^*) + (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^T \mathbf{u}^*,$$

以及

$$\theta_1(\mathbf{w}^{i+1}) - (\boldsymbol{\lambda}^{i+1} + \mu(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}))^T \mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} \leq \theta_1(\mathbf{w}^*) - (\boldsymbol{\lambda}^{i+1} + \mu(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}))^T \mathbf{A}\mathbf{w}^*.$$

结合以上两个不等式, 利用 $\mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{u}^* = 0$, 可得

$$\theta^{i+1} - \theta^* \leq (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^T (\mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}) - \mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^T (\mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^*).$$

由 $\mathbf{r}_P^{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1}$ 的定义, 通过对以上不等式重新排列组合, 可得不等式 (4.14). \square

令 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 为 Lagrange 函数 $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 的鞍点, 定义

$$V^i = \frac{1}{\mu} \|\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^*\|_2^2 + \mu \|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^*\|_2^2,$$

则 V^i 是用来衡量 $\boldsymbol{\lambda}^i$ 与 \mathbf{u}^i 到最优解之间距离的一个度量. 以下引理证明了由 ADMM 算法产生的序列 $(\mathbf{w}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$ 与鞍点 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 的距离逐渐减小.

引理 4.2 假如序列 $(\mathbf{w}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$ 是由 ADMM 算法产生的, 并且 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 为 Lagrange 函数 $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 的一个鞍点, 从而 V^i 是非负递减的, 即

$$V^{i+1} \leq V^i - \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2 - \mu \|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\|_2^2. \quad (4.18)$$

证明 将不等式 (4.13) 与不等式 (4.14) 相加, 并乘以 2, 可得

$$2(\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{r}_P^{i+1} + 2\mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^T \mathbf{r}_P^{i+1} - 2\mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^T (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^*) \geq 0. \quad (4.19)$$

对以上第一项进行变形得到

$$\begin{aligned} 2(\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{r}_P^{i+1} &= 2(\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{r}_P^{i+1} - \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2 - \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2 \\ &= \frac{2}{\mu} (\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^*)^T (\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^{i+1}) - \frac{1}{\mu} \|\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^{i+1}\|_2^2 - \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\mu} (\|\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^*\|_2^2 - \|\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^*\|_2^2) - \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2. \end{aligned}$$

在以上推导过程中, 第一个等式利用 $\boldsymbol{\lambda}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}^i - \mu \mathbf{r}_P^{i+1}$ 得到; 第二个等式利用 $\mathbf{r}_P^{i+1} = \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^{i+1})$ 得到; 最后一个等式利用 $\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^* - (\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^*)$ 得到.

利用 $\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i + (\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^*)$, 可得

$$\begin{aligned} & -\mu \|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2 + 2\mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^T \mathbf{r}_P^{i+1} - 2\mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^T (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^*) \\ &= -\mu \|\mathbf{r}_P^{i+1} - (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)\|_2^2 - \mu \|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\|_2^2 - 2\mu(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^T (\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^*) \\ &= -\mu \|\mathbf{r}_P^{i+1} - (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)\|_2^2 - \mu (\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^*\|_2^2 - \|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^*\|_2^2), \end{aligned}$$

最后一个等式利用 $\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^* - (\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^*)$ 得到. 从而, 不等式 (4.19) 可以被写成

$$\frac{1}{\mu} (\|\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{\lambda}^*\|_2^2 - \|\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^*\|_2^2) - \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1} - (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)\|_2^2 - \mu (\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^*\|_2^2 - \|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^*\|_2^2) \geq 0.$$

由 V^i 的定义, 可得

$$V^i - V^{i+1} \geq \mu \|\mathbf{r}_P^{i+1} - (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)\|_2^2. \quad (4.20)$$

因为 \mathbf{u}^{i+1} 极小化 $\theta_2(\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^T \mathbf{u}$, 并且 \mathbf{u}^i 极小化 $\theta_2(\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\lambda}^i)^T \mathbf{u}$, 可得

$$\theta_2(\mathbf{u}^{i+1}) + (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^T \mathbf{u}^{i+1} \leq \theta_2(\mathbf{u}^i) + (\boldsymbol{\lambda}^{i+1})^T \mathbf{u}^i,$$

以及

$$\theta_2(\mathbf{u}^i) + (\boldsymbol{\lambda}^i)^T \mathbf{u}^i \leq \theta_2(\mathbf{u}^{i+1}) + (\boldsymbol{\lambda}^i)^T \mathbf{u}^{i+1}.$$

将以上两个不等式相加, 并且重新组合, 可得

$$(\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^i)^T (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) \geq 0,$$

利用 $\boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^i = -\mu \mathbf{r}_P^{i+1}$, 并将以上不等式代入 (4.20), 可得 (4.18) 的结果. \square

根据以上引理 4.1 和 4.2, 我们可得以下收敛性结果.

定理 4.1 假设序列 $(\mathbf{w}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$ 是由 ADMM 算法产生的, 如果 $(\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 为 Lagrange 函数 $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 的一个鞍点, 并且 θ^* 为 SCCO 问题 (3.3) 的最优目标函数值, 则 \mathbf{w}^i 和 \mathbf{u}^i 分别收敛到 \mathbf{w}^* 和 \mathbf{u}^* , 并且, 对应的原始残余 \mathbf{r}_P^i 和对偶残余 \mathbf{r}_D^i 均收敛到零, 目标函数值 θ^i 收敛到 θ^* .

证明 因为 $V^i \leq V^0$, 所以 $\boldsymbol{\lambda}^i$ 和 \mathbf{u}^i 有界. 由引理 4.2, 由 ADMM 算法产生的序列 $(\mathbf{w}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)$ 满足不等式 (4.18), 将不等式叠加可得

$$\mu \sum_{i=0}^{\infty} (\|\mathbf{r}_P^{i+1}\|_2^2 + \|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\|_2^2) \leq V^0.$$

以上不等式说明当迭代次数 $i \rightarrow \infty$ 时, 原始残余 $\mathbf{r}_P^i \rightarrow 0$, 并且 $\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\|_2 \rightarrow 0$. 另外, 由 $\mathbf{r}_D^{i+1} = \mu \mathbf{A}^T (\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1})$ 可知, 对偶残余也随着迭代次数 $i \rightarrow \infty$ 收敛到零.

另一方面, 由于 $\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^*$ 是有界的, \mathbf{r}_P^i 和 $\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i$ 随着迭代次数 $i \rightarrow \infty$ 均收敛到零, 从而 \mathbf{u}^i 收敛到 \mathbf{u}^* . 类似地, 我们可以得到 \mathbf{w}^i 和 $\boldsymbol{\lambda}^i$ 分别收敛到 \mathbf{w}^* 和 $\boldsymbol{\lambda}^*$. 并且, 由引理 4.1 的不等式 (4.13) 和 (4.14), 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \theta^i = \theta^*,$$

从而定理得证. \square

5 数值算例

本节通过数值算例来验证新提出的波束形成器设计 SCCO 方法在模拟室内声学环境下的效果, 并且与松弛的 LCMV 方法作对比. 首先定义一个 $12\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3\text{ m}$ 的矩形室内声学环境, 并且在感兴趣

SOI 声源点、干扰 INT 声源点以及噪声 NOI 声源点前方 1.5 m 处放置一组麦克风阵列, 见图 3 室内麦克风阵列系统布局示例图. 假设所有墙壁、地板和天花板材料相同, 从而, 它们具有相同的刻画声波传播过程中能量衰减和损失的吸收系数. 像源法^[27] (image source method, ISM) 是一种简单有效的估计从声源点到麦克风之间声波传播的室内脉冲响应 (RIRs) 的模拟算法, 在以下实验中, 我们定义室内声场回响时间 (reverberation time, RT) $T_{60} = 0.2$ s, 并采用由 Lehmann 和 Johansson^[28] 提出的一种快速像源法 (fast-ISM) 模拟器来估计 RIRs.

我们选择一段抽样频率为 8000 Hz, 持续时间 2.4 s 的男性语音 (“dots of light betrayed the black cat”) 作为感兴趣 SOI 信号输入, 一段具有相同抽样频率与持续时间的女性语音 (“she had your dark suit in greasy wash water all year”) 作为干扰 INT 信号输入. 假设噪声 NOI 声源的位置信息未知, 并且噪声 NOI 信号通常与感兴趣 SOI 信号是独立的, 我们可以通过产生一段白噪声作为噪声 NOI 信号的输入. 接着选择一组含有 9 个麦克风的阵列垂直排列于感兴趣 SOI 声源点、干扰 INT 声源点以及噪声 NOI 声源点的正前方. 根据文献 [29, 30] 关于麦克风阵列位置设计问题的研究, 垂直于目标声源点的麦克风阵列排列设计得到的波束形成器具有更好的效果.

在以下的数值实验中, 首先引入信号 - 回响、干扰与噪声比 (signal-to-reverberation, interference and noise ratio, SRINR) 来评估回响环境下语音信号增强的整体表现. 类似于 Loizou 提出的信号 - 噪声比 (signal-to-noise ratio, SNR) 定义^[31], 一个推广的分段 SRINR 的定义如下:

$$\text{SRINR}_{\text{seg}} = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{S}(q)\|^2}{\|\mathbf{S}(q) - \hat{\mathbf{S}}(q)\|^2} \text{ (dB)}, \quad (5.1)$$

这里 $\mathbf{S}(q)$ 表示在没有回响环境下麦克风接收到的语音信号, $\hat{\mathbf{S}}(q)$ 表示有回响环境下波束形成器的输出语音信号. 为去除非语音信号, 我们将这一比值的阈值定义在 $[-20\text{dB}, 35\text{dB}]$ 范围内. 另外, 我们还引入由 ITU-T 语音质量评估推荐的主观语音质量评估 (perceptual evaluation of speech quality, PESQ) 得分来量化语音信号增强的效果. 这里 PESQ 得分是通过一个线性组合平均干扰值 D_{ind} 和平均不对称干扰值 A_{ind} 得到的^[32], 即

$$\text{PESQ} = 4.5 - 0.1D_{\text{ind}} - 0.0309A_{\text{ind}}. \quad (5.2)$$

尽管大部分情形下 PESQ 得分都是一个类平均意见得分 (mean opinion scores-like, MOS-like), 介于 1.0 到 4.5 之间, 但实际上 PESQ 得分的取值范围是 0.5 到 4.5.

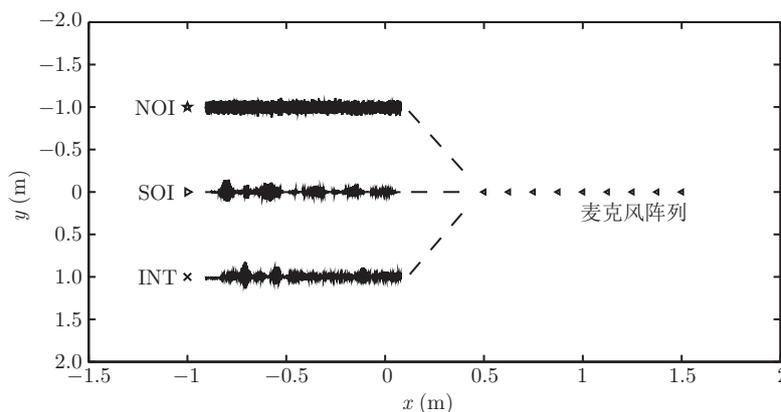


图 3 麦克风阵列系统布局: 一组含有 9 个麦克风的阵列垂直排列于感兴趣 SOI 声源点、干扰 INT 声源点以及噪声 NOI 声源点的正前方

首先考虑新提出的 SCCO 模型中参数 β_1 和 β_2 对波束形成器设计的影响. 给定正则化参数 $\mu = e^4$ 以及选定滤波器长度 $L = 40$, 我们利用 ADMM 方法, 调整 β_1 和 β_2 来设计不同的 SCCO 波束形成器, 然后通过计算其 $SRINR_{seg}$ 值来验证语音增强效果, 比较结果见图 4.

从图 4 可以看出, 选择相对较小的 β_1 和 β_2 来设计波束形成器可以得到更好的语音增强效果, 其中参数 β_1 是用来控制子问题 (4.2b) 关于 \mathbf{u} 的解的稀疏性的, 而参数 β_2 是用来均衡多目标子问题 (4.2a) 的.

从而, 在以下实验中, 我们选定 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = 10$ 来设计 SCCO 波束形成器. 为了验证 SCCO 波束形成器的最优性, 我们验证求解得到的最优波束形成响应中非零元素的位置分布情形. 从图 5 的两个示例可以看出, \mathbf{u} 的最优解中均只含有一个非零元素, 然而其非零元素位置或前或后, 均不处于 $L/2$ 的位置. 这说明了新提出的 SCCO 方法是有效的, 不但能够求解最优波束形成器, 还可以求得最优波束形成响应.

接下来分别利用 SCCO 方法和 LCMV 方法来设计滤波器长度 $L = 40$ 时的波束形成器, 并且验证其在噪声去除 (NOI reduction)、抑制干扰与回响 (INT and REV suppression) 方面的语音增强效果,

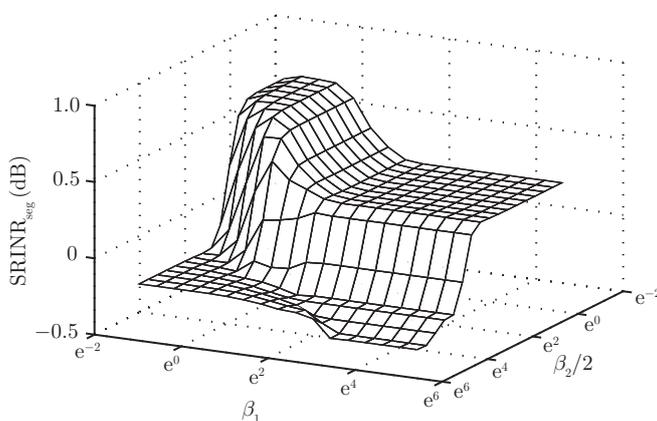


图 4 参数 β_1 和 β_2 对波束形成器设计的影响

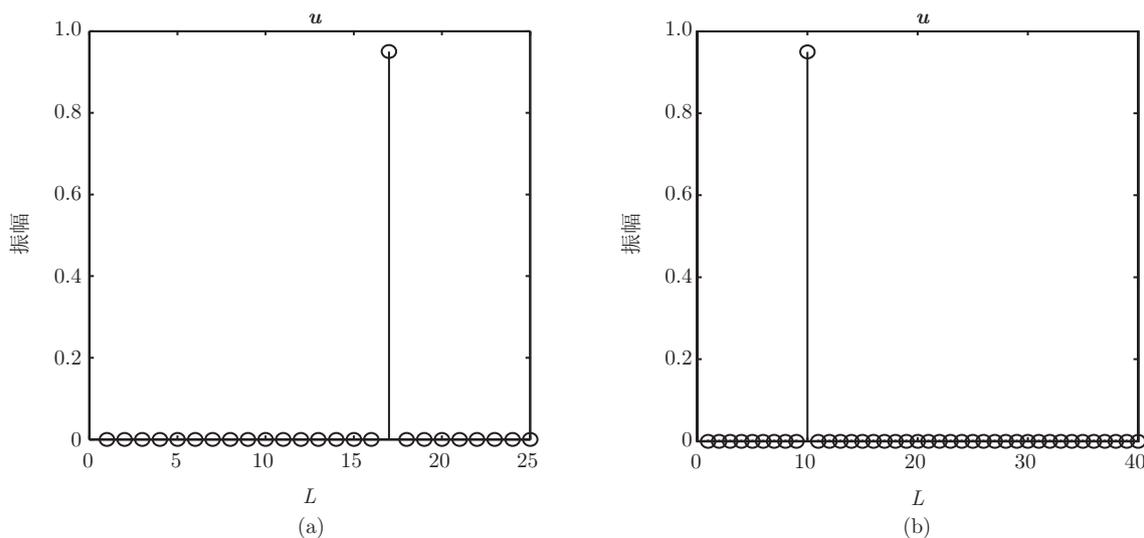


图 5 滤波器长度 $L = 25$ 和 $L = 40$ 情形下, SCCO 模型求解得到的 \mathbf{u} 的最优解

见图 6. 从图中可以看出, 两种方法设计得到的波束形成器在噪声去除、抑制干扰与回响方面都有一定效果. 然而, 由 SCCO 方法设计得到的波束形成器无论是在噪声去除, 还是在抑制干扰与回响方面, 都比由 LCMV 方法设计得到的波束形成器效果更好.

进一步, 我们选择不同的滤波器长度 L , 并且利用 $SRINR_{seg}$ 与 PESQ 得分来度量 SCCO 方法与 LCMV 方法设计得到的波束形成器在语音信号增强方面的效果, 详细对比结果见表 1 和图 7. 从对比结果可以看出, 当滤波器长度 L 的增长到 20 时, LCMV 方法设计得到的波束形成器可以得到关于感兴趣 SOI 信号的 $SIRNR_{seg} > 0$ 的效果, 然而, SCCO 方法在滤波器长度 $L = 15$ 时就能得到关于感兴趣 SOI 信号的 $SIRNR_{seg} > 0$ 的效果. 另外, 与 LCMV 方法设计得到的波束形成器相比, 在选取任何滤波器长度 L 时, SCCO 方法设计得到的波束形成器都能得到更高的 $SRINR_{seg}$ 与 PESQ 得分. 这说明了新提出的 SCCO 方法在有回响环境下可以设计得到比 LCMV 方法更好的波束形成器.

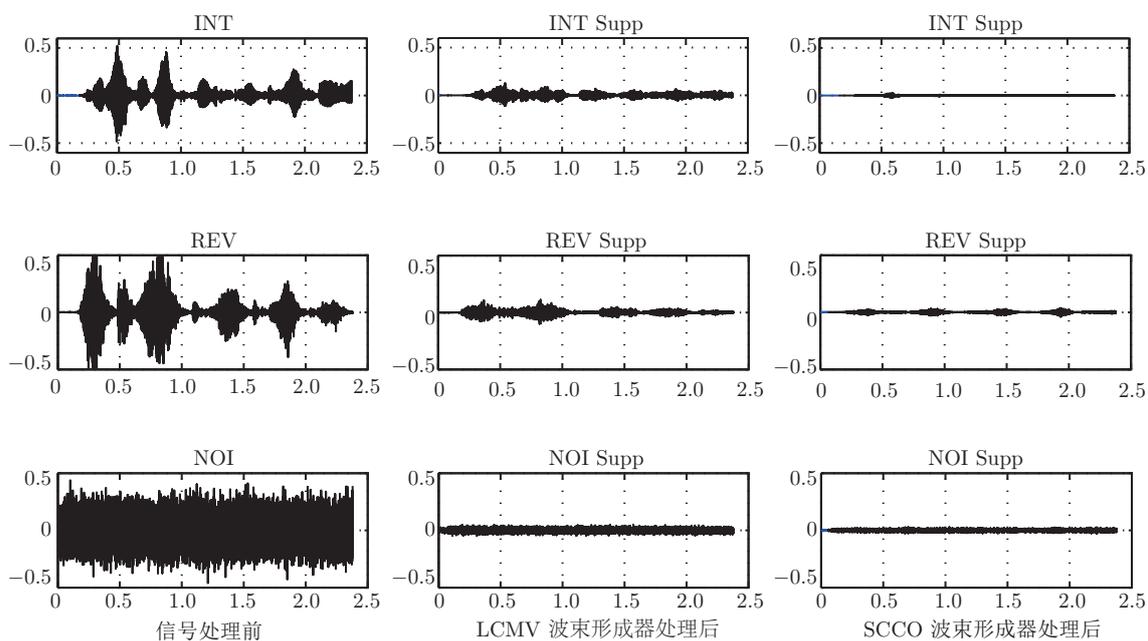


图 6 在滤波器长度 $L = 40$ 时, SCCO 方法与 LCMV 方法设计得到的波束形成器在噪声去除、抑制干扰与回响方面的效果

表 1 选取不同滤波器长度 L 时, SCCO 与 LCMV 方法设计得到的波束形成器在语音信号增强方面的效果对比

L	LCMV		SCCO	
	$SRINR_{seg}$	PESQ	$SRINR_{seg}$	PESQ
10	-3.3650	1.8676	-2.2937	1.8956
15	-1.2629	2.1592	1.4705	2.3703
20	0.0491	2.3863	2.5666	2.5689
25	1.1040	2.5343	3.4422	2.6556
30	1.2641	2.5567	5.5353	2.7021
35	1.3066	2.5682	6.3184	2.7476
40	1.5886	2.5892	6.5093	2.7608

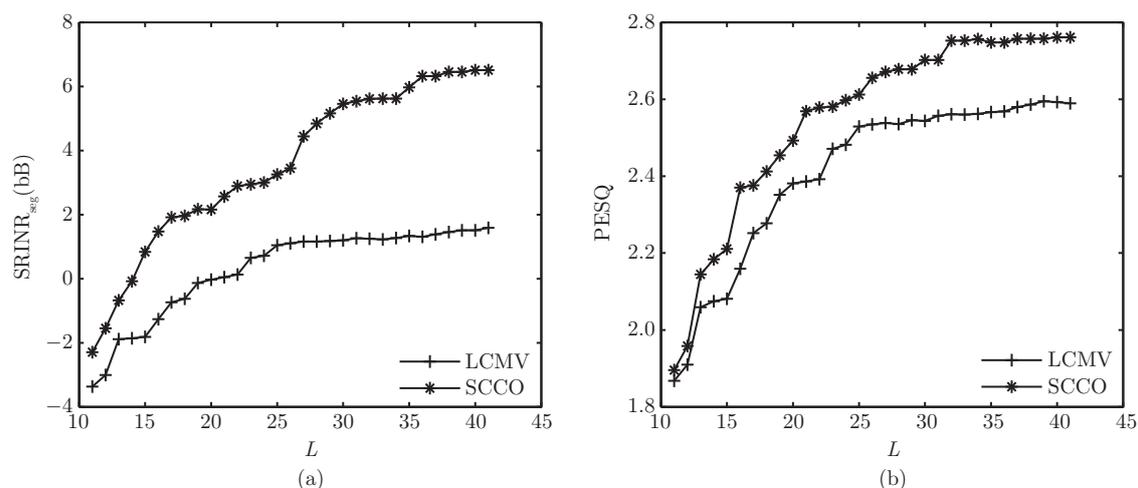


图 7 SCCO 方法与 LCMV 方法设计得到的波束形成器在不同滤波器长度 L 时的 $SRINR_{seg}$ 与 PESQ 得分

6 结论

本文考虑了回响环境下最优波束形成器设计问题, 提出了一个结构型约束凸优化 SCCO 模型. SCCO 模型的思想是通过引入一个新的变量, 将最优波束形成器设计问题建模成一个联合最优波束形成器与最优波束形成响应设计问题. 由于新模型考虑了最优波束形成响应的求解, 基于 SCCO 方法的波束形成器设计技术能够在有回响环境下极大地提高语音信号增强的效果. 另外, 考虑到新提出的 SCCO 模型具有结构可分性, 我们引入交替方向乘子法 (ADMM) 加以求解, 并且为了文章的完整性, 我们也给出了一个 ADMM 算法收敛性证明的一个简单框架. 我们的数值算例结果表明 ADMM 算法求解 SCCO 问题的是有效的, 在与采用 LCMV 方法设计得到的波束形成器在语音信号增强方面的对比过程中, 新提出的 SCCO 方法能够在有回响环境下设计出具有更好效果的波束形成器.

参考文献

- 1 Benesty J, Chen J, Huang Y. *Microphone Array Signal Processing*. Berlin: Springer-Verlag, 2008
- 2 Brandstein M, Ward D. *Microphone Arrays: Signal Processing Techniques and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2001
- 3 Liu W, Weiss S. *Wideband Beamforming: Concepts and Techniques*. Chichester: Wiley, 2010
- 4 Brennan L E, Mallett J D, Reed I S. Adaptive arrays in airborne MTI radar. *IEEE Trans Antennas and Propagation*, 1976, 24: 607–615
- 5 Cox H. Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors. *J Acoust Soc Am*, 1973, 54: 771–785
- 6 Krolik J L. The performance of matched-field beamformers with mediterranean vertical array data. *IEEE Trans Signal Proces*, 1996, 44: 2605–2611
- 7 Capon J. High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc IEEE*, 1969, 57: 1408–1418
- 8 Johnson D H. The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems. *Proc IEEE*, 1982, 70: 1018–1028
- 9 Frost III O L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing. *Proc IEEE*, 1972, 60: 926–935
- 10 Griffiths L J, Jim C W. An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming. *IEEE Trans Antennas and Propagation*, 1982, 30: 27–34
- 11 Van Trees H L. *Optimum Array Processing*. New York: Wiley, 2002

- 12 Affes S, Grenier Y. A source subspace tracking array of microphones for double talk situations. *Proc IEEE*, 1996, 2: 906–912
- 13 Werner S, Apolinário Jr J A, de Campos M L R. On the equivalence of RLS implementations of LCMV and GSC processors. *IEEE Signal Process Lett*, 2003, 10: 356–359
- 14 Bitzer J, Simmer K U, Kammeyer K D. Theoretical noise reduction limits of the generalized sidelobecanceller (GSC) for speech enhancement. *Proc IEEE*, 1999, 5: 2965–2968
- 15 Breed B R, Strauss J. A short proof of the equivalence of LCMV and GSC beamforming. *IEEE Signal Process Lett*, 2002, 9: 168–169
- 16 Van Veen B D, Buckley K M. Beamforming: A versatile approach to spatial filtering. *IEEE Acoust Speech Signal Process Mag*, 1988, 5: 4–24
- 17 Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Found Trends Mach Learn*, 2011, 3: 1–122
- 18 Eckstein J, Bertsekas D P. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. *Math Program*, 1992, 55: 293–318
- 19 Gabay D. Applications of the method of multipliers to variational inequalities. In: *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Solution of Boundary-Value Problems*. North-Holland: Amsterdam, 1983, 299–331
- 20 He B S, Liao L Z, Han D R, et al. A new inexact alternating directions method for monotone variational inequalities. *Math Program*, 2002, 92: 103–118
- 21 Tseng P. Applications of splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities. *SIAM J Control Optim*, 1991, 29: 119–138
- 22 Bradley J S, Sato H, Picard M. On the importance of early reflections for speech in rooms. *J Acoust Soc Am*, 2003, 113: 3233–3244
- 23 Tervo S, Korhonen T, Lokki T. Estimation of reflections from impulse responses. *Build Acoust*, 2011, 18: 159–174
- 24 Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Rev*, 2001, 43: 129–159
- 25 Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *J R Stat Soc Ser B Stat Methodol*, 1996, 267–288
- 26 Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52: 489–509
- 27 Allen J B, Berkley D A. Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *J Acoust Soc Am*, 1979, 65: 943–950
- 28 Lehmann E A, Johansson A M. Diffuse reverberation model for efficient image-source simulation of room impulse responses. *IEEE Trans Audio Speech Language Process*, 2010, 18: 1429–1439
- 29 Feng Z G, Yiu K F C, Nordholm S E. Placement design of microphone arrays in near-field broadband beamformers. *IEEE Trans Signal Process*, 2012, 60: 1195–1204
- 30 Li Z B, Yiu K F C, Feng Z G. A hybrid descent method with genetic algorithm for microphone array placement design. *Appl Soft Comput*, 2013, 13: 1486–1490
- 31 Loizou P C. *Speech Enhancement: Theory and Practice*. Boca Raton: CRC Press, 2007
- 32 Rix A W, Beerends J G, Hollier M P, et al. Perceptual evaluation of speech quality (PESQ) — A new method for speech quality assessment of telephone networks and codecs. *Proc IEEE*, 2001, 2: 749–752

Optimal beamformer design in the reverberant environment

LI ZhiBao & DAI YuHong

Abstract Most existing methods on beamformer design, such as the minimum variance distortionless response (MVDR) method and the linearly constrained minimum variance (LCMV) method, assume that the group delay is known and often heuristically preselected to be half of the filter length. However, the optimal group delay is problem-dependent in practice, and the beamformer design performance based on the optimal beamformer response can be significantly better than the one based on the preselected beamformer response in the reverberant environment. In this paper, we consider the optimal beamformer design problem, i.e., the joint beamformer response and beamformer design problem. We introduce a new variable to represent the beamformer response and formulate the joint beamformer response design and beamformer design problem as a structured constrained

convex optimization (SCCO) problem. Moreover, we exploit the separable structures of the SCCO problem and propose to use the alternating direction method of multipliers (ADMM) to solve it, and give a simple proof for the analysis of convergence. Numerical simulation results show the effectiveness of the proposed method in the reverberant environment by comparing it with the LCMV method.

Keywords beamformer design, rereverberation, beamformer response, structured constrained convex optimization, alternating direction method of multipliers

MSC(2010) 94A12, 90C30, 90C90

doi: 10.1360/012016-17